ANWENDUNG DER HILBERT-HUANG-TRANSFORMATION ZUR AUSWERTUNG VON IMPACT-ECHO-DATENSÄTZEN

D. Algernon, H. Wiggenhauser

Bundesanstalt für Materialforschung und –prüfung (BAM), Berlin

1 Einleitung

Das Impact-Echo (IE)-Verfahren wurde in den letzten Jahren mit Erfolg bei der zerstörungsfreien Prüfung im Bauwesen zur Dickenbestimmung von Betonbauteilen sowie zur Defektlokalisation im Bauteilinneren eingesetzt.
Die Funktionsweise dieses akustischen Verfahrens beruht auf der Analyse von Vielfachreflexionen nach einer mechanischen Impulsanregung. Das Prinzip sei anhand von Abbildung 1 erklärt: die Anregung erfolgt mit einem Impulshammer oder einer Stahlkugel, die Signalaufnahme mit einem auf der Oberfläche angekoppelten Schwingungsaufnehmer.
Befindet sich im Bauteil eine zur Oberfläche parallele schallreflektierende Schicht, so wird der Schallimpuls zwischen den beiden Schichtgrenzen vielfach reflektiert. Dies führt zu einem periodischen Signal am dicht neben der Anregung platzierten Sensor.*[1, 2, 3]*
Unter der Voraussetzung eines periodischen Vorganges lässt sich die Dicke des Bauteils bzw. die Fehlstellentiefe bei Kenntnis der Longitudinalwellengeschwindigkeit aus der Wiederholungsfrequenz berechnen:

$$2d = c_L \cdot T = \frac{c_L}{f} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d = \frac{c_L}{2f}}$$

c_L: Longitudinalwellengeschwindigkeit
d: Dicke der Schicht
T: Periodendauer
f: Frequenz

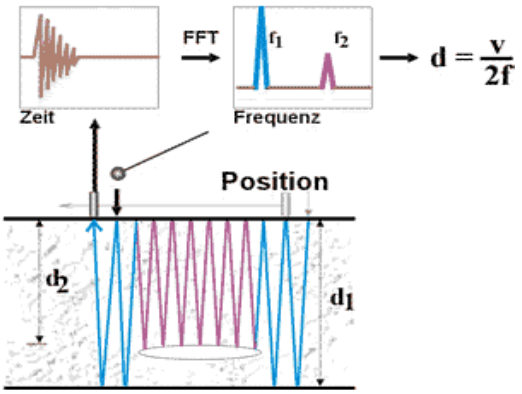


Abb. 1: Funktionsweise des Impact-Echo-Verfahrens

Für Messaufgaben mit parallelen Grenzflächen, zwischen denen in ausreichendem Maße Schallenergie mehrfach reflektiert wird, ist das Verfahren sehr gut geeignet. Die Dicken von Betonbauteilen oder Ablösungen können in der Regel sicher bestimmt werden. Die

Schwingungsaufnehmer haben eine Bandbreite etwa im Bereich von 1 kHz bis 30 kHz.
Für die Auswertung werden die aufgenommenen Zeitsignale in den Frequenzbereich transformiert. Das erfolgt klassischerweise über eine Fast Fourier Transformation (FFT), durch die sich jedoch lediglich das Frequenzspektrum des Signals über dessen gesamte zeitliche Länge bzw. ein explizit ausgewähltes Zeitintervall hinweg bestimmen lässt. Um auch die zeitliche Änderung des Frequenzgehaltes erfassen zu können, bedarf es weiterer Methoden, die eine Darstellung der Amplitude über Zeit und Frequenz liefern. Die wohl bekanntesten dieser Art sind die Short-Time-Fourier-Transformation (STFT) und die Wavelet-Transformation. Dieser Beitrag beschäftigt sich mit einer neueren Methode der Zeit-Frequenz-Analyse: der Hilbert-Huang-Transformation (HHT). Im folgenden soll das Prinzip der HHT zunächst kurz dargestellt werden und anschließend über deren Anwendung auf reale Impact-Echo-Daten berichtet werden.

2 Hilbert-Huang-Transformation

Die erst 1998 von Huang et al. *[4]* entwickelte Methode nutzt die Hilbert-Transformation zur Bestimmung der Momentanfrequenz und Momentanamplitude, welche zusammen das sogenannte Hilbert-Spektrum $H(\omega, t)$ bilden. Die HHT erweitert die herkömmliche Hilbert-Transformation durch eine vorgeschaltete adaptive Zerlegung des Ausgangssignals, welche als *Empirical Mode Decomposition* (EMD) bezeichnet wird. Mit Hilfe der EMD können komplizierte Datensätze in eine begrenzte (und meist geringe) Anzahl sogenannter *Intrinsic Mode Functions* (IMFs) zerlegt werden. Der Einsatzbereich der Hilbert Transformation vergrößert sich dadurch beträchtlich, da sie sich auf diese Weise auch auf beliebige breitbandige Signale sinnvoll anwenden lässt. Der Berechnungsablauf ist in Abbildung 2 schematisch skizziert.

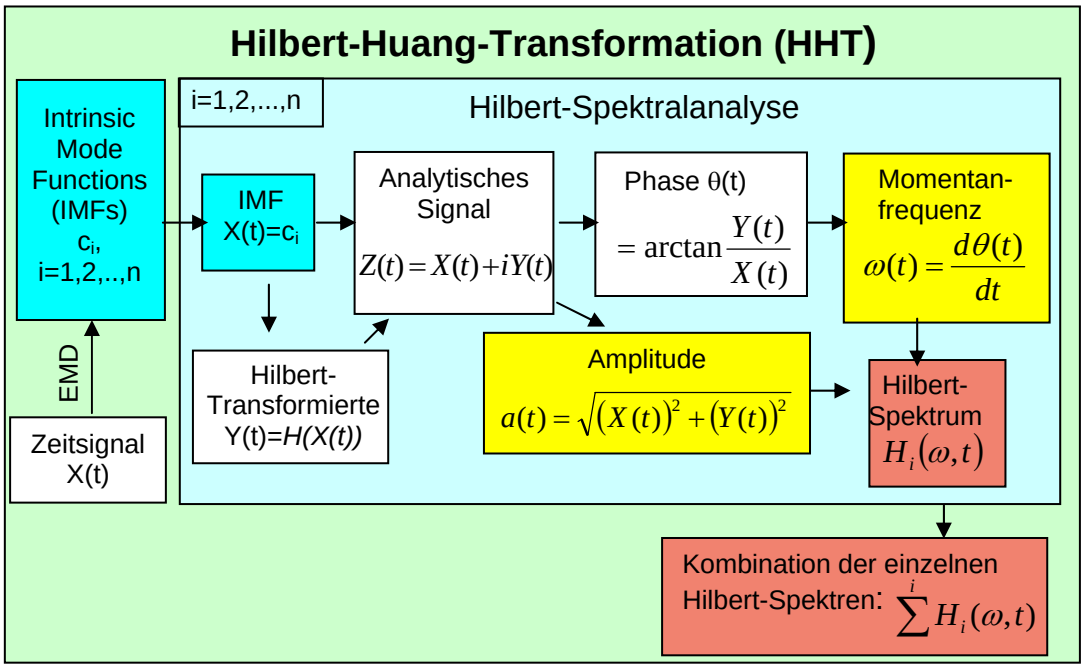


Abb. 2: Berechnungsschema der Hilbert-Huang-Transformation

Die Hilbert Spektralanalyse liefert neben der Momentanamplitude $a(t)$ auch die Momentankreisfrequenz $\omega(t)$, jeweils in Abhängigkeit von der Zeit. Die Berechnung erfolgt über das analytische Signal $Z(t)$. Dessen Realteil wird dabei durch das Zeitsignal $X(t)$ gebildet, der Imaginärteil $Y(t)$ durch die Hilbert-Transformierte $H(X(t))$ des Zeitsignals. Daraus bestimmt sich die Momentanamplitude $a(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit zu:

$$a(t) = \sqrt{\left(X(t)\right)^2 + \left(Y(t)\right)^2} \quad . \qquad (2.1)$$

Ebenso bestimmt sich die Momentanphase $\theta(t)$ zu:

$$\theta(t) = \arctan \frac{Y(t)}{X(t)} \, . \qquad (2.2)$$

Die Ableitung der Momentanphase nach der Zeit liefert letztendlich die Momentankreisfrequenz $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \, . \qquad (2.3)$$

Weitergehende Erläuterungen bezüglich dieser Definition finden sich in [4]. Diese Form der Frequenzbestimmung erweist sich verglichen mit anderen Methoden als durchaus effizient. Damit die Hilbert-Spektralanalyse zu physikalisch sinnvoll interpretierbaren Resultaten führt, sollten die Eingangsdatensätze jedoch bestimmten Kriterien genügen, welche die (lokale) Schmalbandigkeit sowie eine Symmetrie zur Amplitudennullinie fordern [4]. Aufgrund dieser Einschränkungen ist der Einsatzbereich der alleinigen Hilbert-Spektralanalyse stark limitiert. Das wird schon durch die Aussage der Momentanfrequenz deutlich, welche für jeden Zeitpunkt nur einen einzigen Frequenzwert liefert. Für sehr schmalbandige Signale erhält man hierdurch eine prägnante Aussage über den momentanen Frequenzgehalt. Die bei Impact-Echo-Messungen gewonnenen Signale hingegen sind jedoch meist breitbandig, so dass eine solche Angabe physikalisch wenig aussagekräftig ist.
Durch die vorgeschaltete EMD-Zerlegung der HHT in die eingangs erwähnten IMFs wird der Anwendungsbereich der Hilbert-Spektralanalyse auch auf derartige praxisrelevante Signale ausgeweitet. Die für den sinnvollen Einsatz der Hilbert-Transformation geforderten Kriterien werden für die IMFs aufgrund einer iterativen Vorgehensweise bei der EMD sichergestellt. Hierbei werden aus den Eingangsdaten zunächst wie in Abbildung 3 dargestellt jeweils die lokalen Maxima und Minima bestimmt und durch eine kubische Spline-Interpolation miteinander verbunden. Man erhält somit die obere und untere Einhüllende. Anschließend wird aus beiden die Mittelwertkurve errechnet und vom Eingangssignal abgezogen. Das resultierende Signal liefert nun die Eingangsdaten für den nächsten Iterationsschritt. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis ein vorher zu definierendes Abbruchkriterium erfüllt ist. Als Ergebnis erhält man somit die erste IMF. Für die Bestimmung der nächsten IMF subtrahiert man diese vom ursprünglichen Datensatz. Nach dem gleichen Schema

werden auch die übrigen IMFs bestimmt bis sich keine weitere mehr aus dem Datensatz extrahieren lässt. Dadurch werden in jedem Schritt die (lokal betrachtet) höchsten Frequenzanteile gewonnen, weshalb dieser Extraktionsprozess als *Sifting* (engl.: Sieben) bezeichnet wird.
Diese Vorgehensweise hat zwei Effekte: zum einen eliminiert sie in der daraus bestimmten IMF sogenannte *riding waves* (höherfrequente Superpositionen mit der eigentlichen Funktion), zum anderen hat sie eine glättende Wirkung auf die Amplituden. Während der erstgenannte Effekt absolut notwendig für die Aussagekraft der Momentanfrequenz ist, kann der zweite Effekt, wenn die Iteration über ein bestimmtes Maß hinaus betrieben wird, im Eingangssignal enthaltene physikalisch bedeutsame Amplitudenfluktuationen verwischen. Daher sollte der *Sifting*-Prozess mit der nötigen Vorsicht durchgeführt werden, hängt dessen Effizienz doch von mehreren Parametern ab, die vom Benutzer gewählt werden müssen und einiger Erfahrung bedürfen. *[4, 5, 8, 9]*

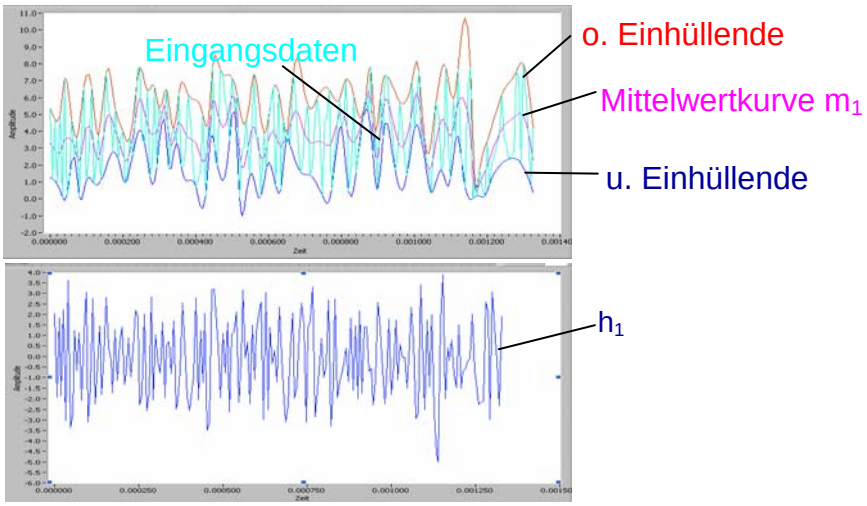


Abb. 3: Darstellung eines Iterationsschritts des Sifting-Prozesses:
Oben: Bestimmung der Mittelwertkurve aus oberer und unterer Einhüllender. Die Einhüllenden ergeben sich aus kubischer Spline-Interpolation zwischen den Extremalstellen.
Unten: Ergebnis nach einem Iterationsschritt (Subtraktion der Mittelwertkurve von den Eingangsdaten).

Exemplarisch sei die IMF-Zerlegung für ein IE-Signal in Abbildung 4 demonstriert.

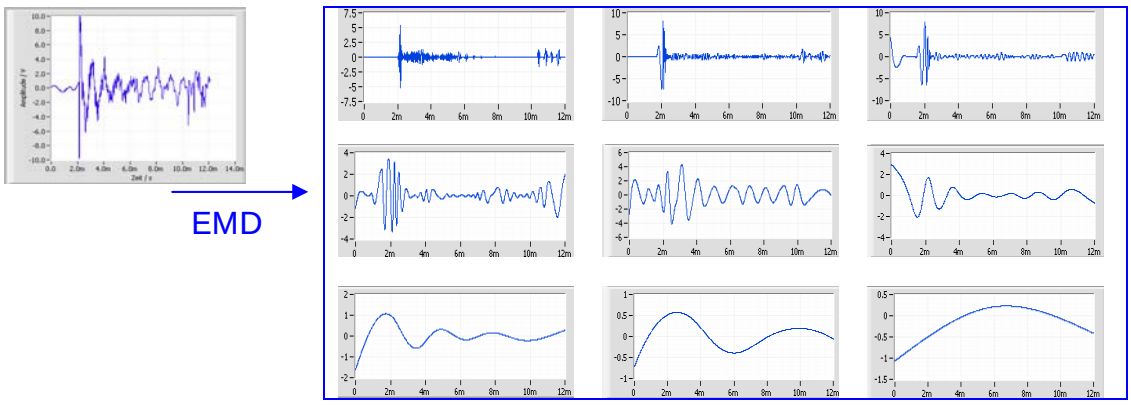


Abb. 4: Exemplarische Zerlegung eines IE-Signals in IMFs

Für jede der auf diese Weise bestimmten IMFs wird das Hilbert-Spektrum berechnet. Durch die Zusammenfassung der Hilbert-Spektren aller IMFs wird eine Zeit-Frequenz-Darstellung für das ursprüngliche Signal erhalten. Wird als Ergebnis jedoch eine integrale Darstellung der Amplitude nur über der Frequenz bevorzugt, so wird die Amplitude über ein ausgewähltes Zeitintervall $[T_1;T_2]$ aufsummiert und allein über der Frequenz dargestellt:

$$h(\omega,t) = \int_{T_1}^{T_2} H(\omega,t)dt \,. \qquad (2.4)$$

Diese Darstellung wird als Marginalspektrum der HHT bezeichnet.

Das Wesen der EMD-Methode besteht darin, die intrinsischen Oszillationsmoden anhand derer charakteristischen zeitlichen Maßstäbe zu identifizieren und entsprechend zu zerlegen. Anders als bei der Fourier- oder der Wavelet-Transformation erfolgt die EMD-Zerlegung nicht in eine a priori definierte Basis von Funktionen sondern geschieht adaptiv am Signal, wodurch sich diese Art der Zerlegung als sehr effizient erweist. Vor diesem Hintergrund lässt sich die selektive Rekombination der IMFs auch zur Signalfilterung heranziehen. Das kann auch dann sinnvoll sein, wenn die Frequenzanalyse mit einer anderen Methode, beispielsweise der FFT, durchgeführt wird.

Aufgrund der iterativen Vorgehensweise bei der Durchführung des *Sifting*-Prozesses ist eine analytische Formulierung der IMFs nicht gegeben, vielmehr definieren sich diese durch den Algorithmus an sich. Daher ist eine theoretische Bewertung der Eignung der Methode nicht möglich, diese muss empirisch erfolgen. In folgenden Abschnitt sollen anhand von praktischen Beispielen Applikationen der Methode zur Analyse von Impact-Echo-Daten gezeigt werden.

3 Anwendung der HHT auf reale IE-Daten

3.1 IE-Messungen an einer Autobahnbrücke unter Verkehr

Im Folgenden soll die Methodik anhand eines Beispieldatensatzes (Abbildung 6) demonstriert werden, der von Impact-Echo-Messungen stammt, die am Hohlkastensteg einer Autobahnbrücke aus Stahlbeton in Berlin (Abbildung 5) unter laufendem Verkehr durchgeführt wurden. Abbildung 7 zeigt das Ergebnis der FFT dieses Signals. Hierin sind hohe Amplituden nur im Bereich von 1 kHz und darunter sichtbar. Die theoretisch zu erwartende Anzeige der Rückwand bei 55 cm ergibt sich bei einer für den Beton anzusetzenden Schallgeschwindigkeit von etwa 4100 m/s zu einer Frequenz von nur wenig unter 4 kHz. In diesem Frequenzbereich lässt sich aus der FFT jedoch keine eindeutige Anzeige ablesen.

Abb. 5: links: Messobjekt für IE-Messungen: Hohlkastensteg einer Autobahnbrücke aus Spannbeton unter laufendem Verkehr, rechts: Impact-Echo-Messkopf der Firma Olson Instruments, bestehend aus Sensor (1) und Impactor (2)

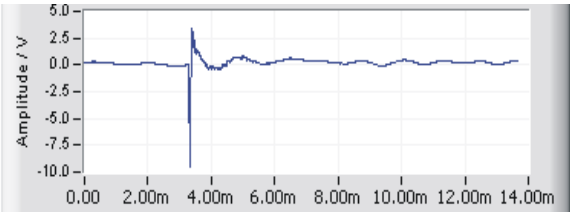


Abb. 6: Impact-Echo-Zeitsignal

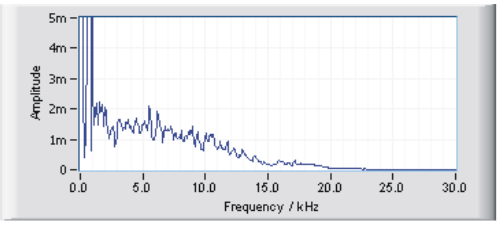


Abb. 7: Fourier-Spektrum des IE-Signals

Auf dieses Signal wird nun die HHT gemäß Abschnitt 2 angewendet. Mit Hilfe der EMD wird die Zerlegung in IMFs durchgeführt und für jede IMF das Hilbert-Spektrum berechnet. Anschließend werden die einzelnen Spektren kombiniert und zu einem einzigen (Abbildung 8) zusammengefasst, welches das eigentliche Ergebnis der HHT darstellt. Auf eine Filterung durch gezielte Kombination nur ausgewählter IMFs wurde zunächst verzichtet.
Hierin sind zum einen die weitestgehend durchgängig vorhandenen hohen Intensitäten bei niedrigen Frequenzen im Bereich um 1 kHz herum zu erkennen. Darüber hinaus sind zeitlich begrenzt auch hohe Intensitäten im Bereich um 4 kHz auf der Frequenzachse und etwa 3 ms auf der Zeitachse zu sehen. Für die Interpretation der Ergebnisse erweist sich jedoch die integrale Darstellung als Marginalspektrum über den entsprechenden Bereich als vorteilhafter. Darin zeigt sich eine deutliche Anzeige im Bereich der für das Rückwandecho zu erwartenden Frequenz.

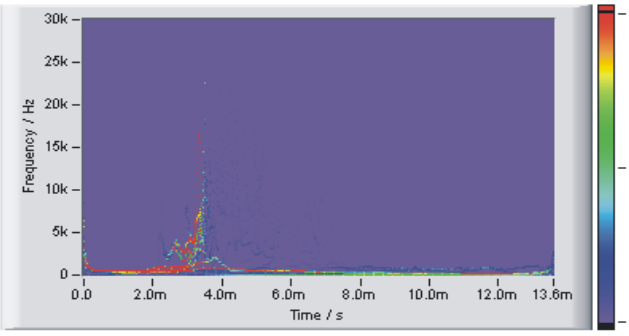


Abb. 8: HHT-Spektrum des IE-Datensatzes

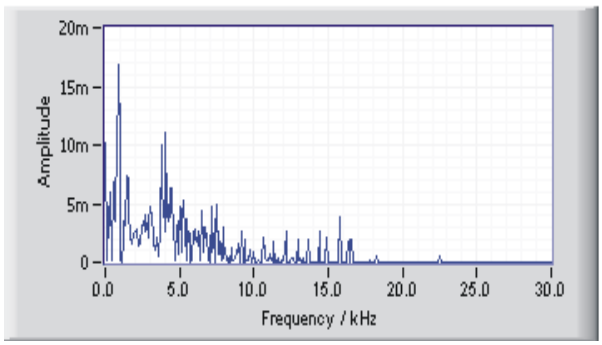


Abb. 9: HHT-Marginalspektrum, Frequenzinkrement df=200 Hz Erkennbar ist hier eine Anzeige im Bereich der zu erwarteten Frequenz von etwa 4 kHz.

Stellen wir diesen Ergebnissen der HHT jene der Short-Time Fourier-Transformation (STFT) und der Continuous Wavelet Transformation gegenüber. Um eine hohe zeitliche Schärfe zu erzielen, ist bei der STFT eine geringe Fensterlänge erforderlich. Diese hat jedoch eine geringe Schärfe hinsichtlich der Frequenz zur Folge. Andersherum folgt aus einer großen Fensterlänge eine geringe zeitliche Schärfe. Diese widersprüchlichen Forderungen limitieren den Nutzen der STFT. Für das hier betrachtete Beispiel der IE-Daten wurden drei STFT-Spektrogramme mit unterschiedlichen Fensterlängen (0,067 ms, 0,838 ms, 1,668 ms und 3,335 ms) berechnet (Abbildung 10).

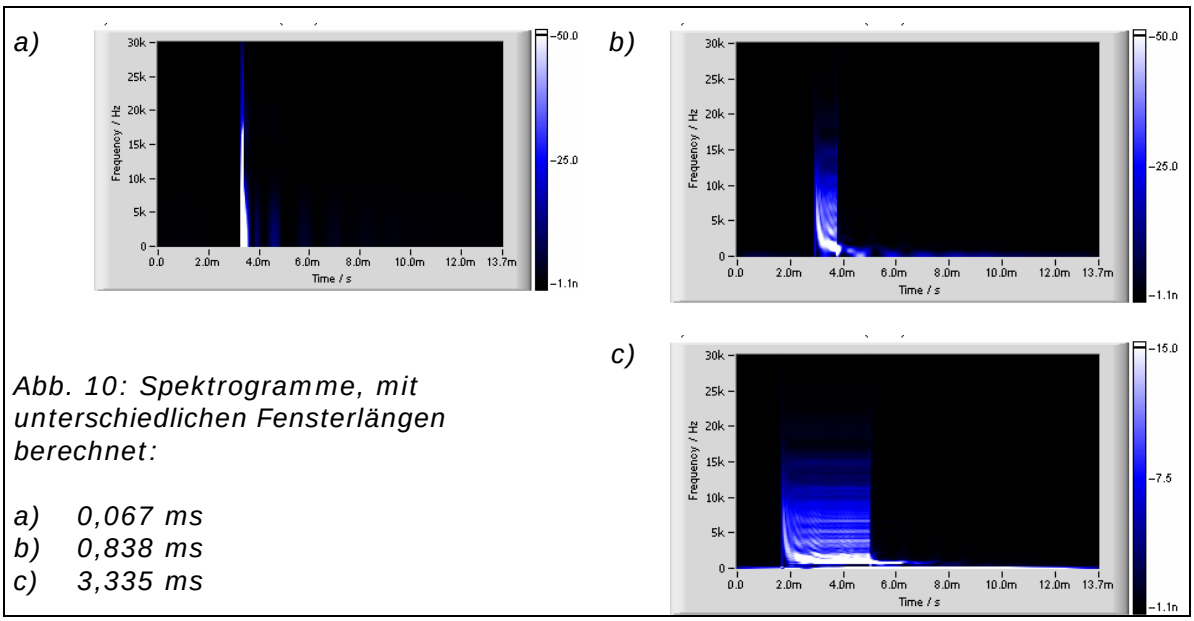


Abb. 10: Spektrogramme, mit unterschiedlichen Fensterlängen berechnet:

a) 0,067 ms
b) 0,838 ms
c) 3,335 ms

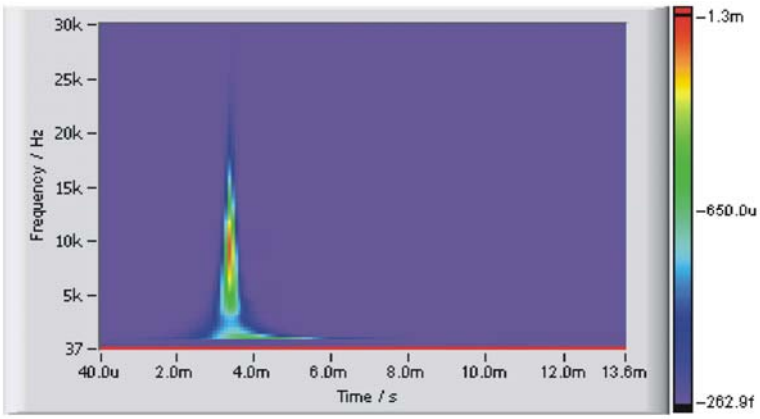
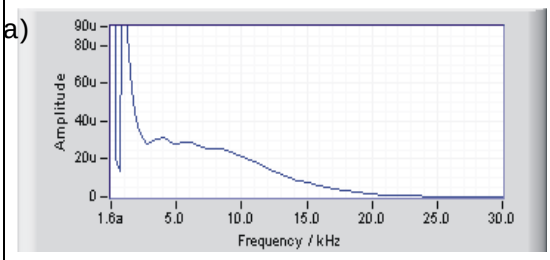


Abb. 11: Wavelet-Transformation (Morlet Wavelet), dargestellt ist die Amplitude über Zeit und Frequenz

a)



b)

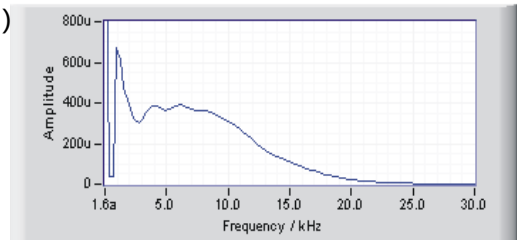


Abb. 12: Wavelet-Marginalspektren mit unterschiedlichen Integrationsbereichen: a) gesamte Signallänge, b) 1 ms Länge ab Impact-Anregung

Abbildung 10a zeigt das Spektrogramm mit der geringsten Fensterlänge von 0,0067 ms. Lediglich der Einsatzpunkt des Signals lässt sich auf der Zeitachse ablesen, für eine Frequenzauswertung lässt sich dieses Spektrogramm jedoch aufgrund mangelnder Schärfe nicht heranziehen. Das Spektrogramm in Abbildung 10c besitzt die größte Fensterlänge und damit eine geringe zeitliche Schärfe. Erkennbar ist hier die durchgängig vorhandene niedrige Frequenz von 1 kHz. Hohe Intensitäten zeigen sich im Zeitbereich von 2 ms bis 5 ms, allerdings über einen sehr weiten Bereich von 0 kHz bis 15 kHz. Eine deutliche Anzeige des erwarteten Rückwandechos ist also weder im Zeitbereich noch im Frequenzbereich gegeben. Auch in Abbildung 10b (Fensterlänge 0,838 ms) ist die Frequenzschärfe zu gering, als dass hier nützliche Informationen aus dem Spektrogramm gewonnen werden könnten.
Abbildung 11 zeigt die Amplituden-Zeit-Frequenz-Darstellung der Continuous Wavelet Transformation unter Verwendung des Morlet-Wavelets, Abbildung 12 die dazugehörigen Marginalspektren. Hierbei wurde zum einen über die gesamte Signallänge integriert (Abbildung 12a), zum anderen nur über einen Bereich von 1 ms Länge ab der Impact-Anregung (Abbildung 12b). Auch hier ist eine klare Anzeige im Bereich der zu erwartenden Rückwandfrequenz nicht auszumachen.

Für dieses Beispiel erweist sich somit der Einsatz der Hilbert-Huang-Transformation als durchaus sinnvoll.

3.2 IE-Messungen unter Einwirkungen von Bohrvibrationen

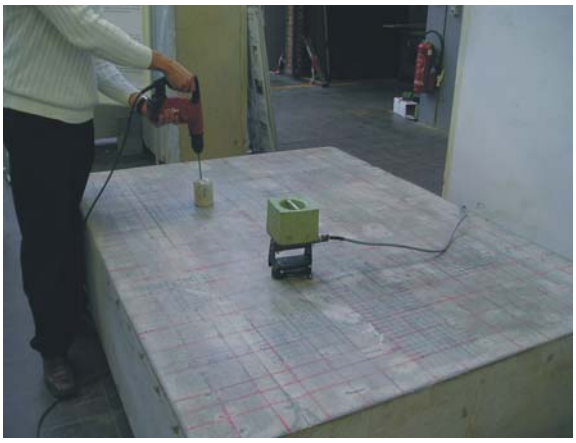


Abb. 13: Impact-Echo-Messungen unter Einwirkung von Bohrvibrationen

Bei IE-Messungen auf Baustellen stellen die von Baugeräten ausgehenden Vibrationen oft ein Problem dar. Um diese Messsituation unter Laborbedingungen herzustellen wurde ein Betonprobekörper mittels einer Schlagbohrmaschine gezielt Erschütterungen ausgesetzt (Abbildung 13).
Gleichzeitig wurden Impact-Echo-Messungen daran durchgeführt. Der Betonprobekörper besitzt die Abmessungen 2,00 m * 1,50 m * 0,50 m.
Bei dem verwendeten Impact-Echo-Kopf handelt es sich um das kommerzielle Modell IE1 der Firma Olson-Instruments. Um konstante Ankopplungsbedingungen zu realisieren, wurde der Impact-Echo-Kopf lediglich auf den Probekörper aufgesetzt und mit einem Massestück beschwert.
Die aus den Messungen gewonnenen Zeitsignale sind wie exemplarisch in Abbildung 14 oben dargestellt stark von den Bohrvibrationen beeinflusst. Unten in Abbildung 14 ist das mit Hilfe der FFT ermittelte Frequenzspektrum gezeigt, welches ebenfalls von den Erschütterungen der Schlagbohrmaschine dominiert wird. Diese zeigen sich vor allem bei tiefen Frequenzen bis ca. 2,5 kHz. Die Rückwandanzeige (Nutzsignal) der Impact-Echo-Messung zeigt sich vergleichsweise undeutlich bei 4 kHz.

In Abbildung 15 sind dazu die Zeit-Frequenz-Darstellungen von HHT, STFT und Wavelet-Transformation gegenübergestellt. Gut zu erkennen sind in allen drei Darstellungen die über die gesamte Aufnahmelänge vorhandenen hohen Amplituden bei tiefen Frequenzen. Ebenso hervor geht der Einsatz des Impact-Echo-Signals.
Die quantitative Bewertung der Spektren erleichtert sich, wenn für ausgewählte Zeitbereiche die (integrale) Darstellung von Amplitude über Frequenz betrachtet wird. Im Falle von HHT und Wavelet-Transformation erhält man diese als Marginalspektrum. Im Falle der Fourier-Transormation macht eine Aufsummierung des Spektrogramms selbstverständlich keinen Sinn, hier wird stattdessen die FFT für das auf die betrachtete Länge herausgeschnittene Zeitsignal berechnet.
Abbildung 16 zeigt die Amplituden-Frequenz-Darstellungen der drei Methoden unter Einbeziehung der gesamten Aufnahmelänge (linke Spalte) sowie vergleichend dazu unter Einbeziehung nur eines kurzen Signalausschnitts von 1 ms Länge direkt hinter dem Anregungszeitpunkt.

Für jede der hier betrachteten Auswertungsmethoden zeigen sich hohe Amplituden bei sehr niedrigen Frequenzen. Unter Einbeziehung der gesamten Signallänge ist die Rückwandanzeige bei einer Frequenz von etwa 4 kHz in allen Fällen erkennbar, jedoch nur mit eingeschränkter Deutlichkeit.

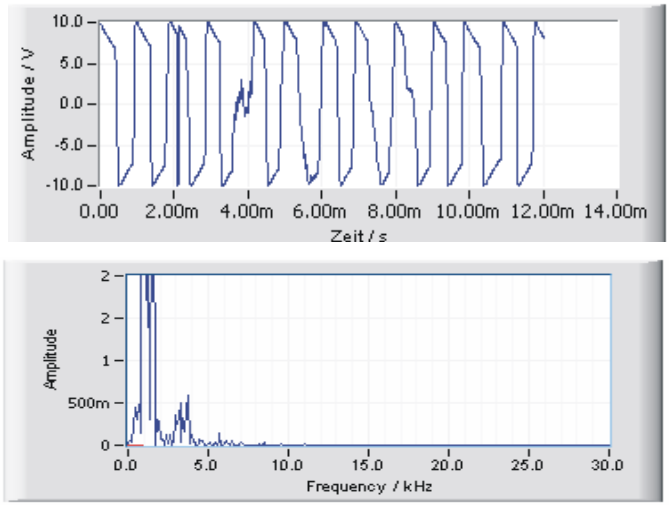


Abb. 14: Von Bohrvibrationen stark beeinflusstes IE-Zeitsignal (oben) mit FFT (unten)

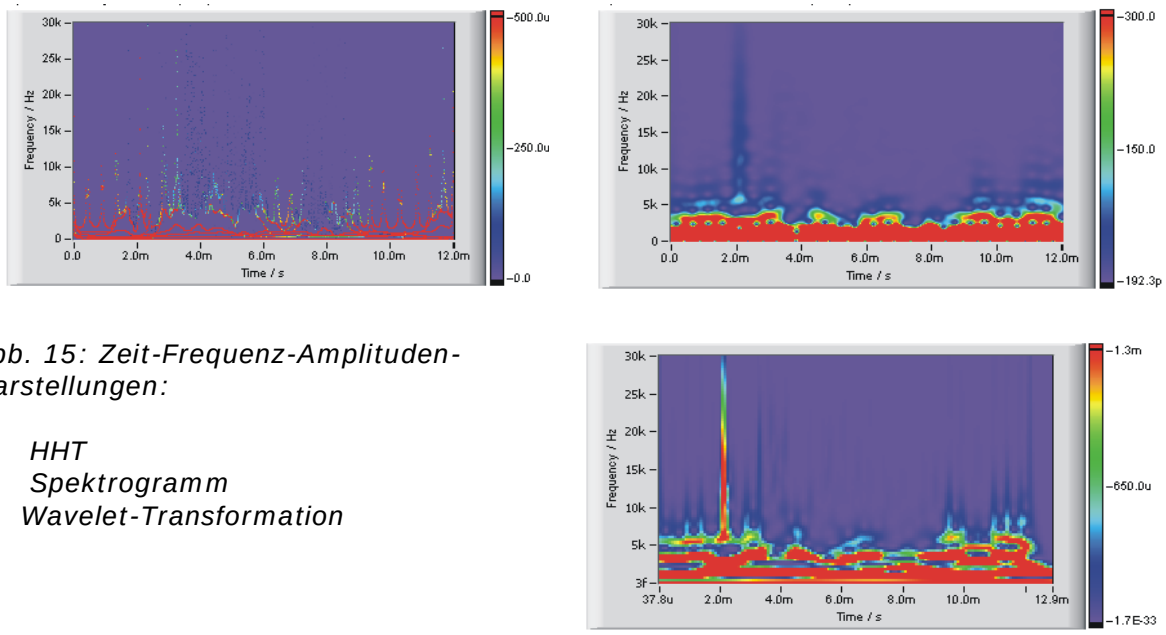


Abb. 15: Zeit-Frequenz-Amplituden-Darstellungen:

a) HHT
b) Spektrogramm
c) Wavelet-Transformation

Durch die Eingrenzung des Zeitbereichs hebt sich diese im HHT-Marginalspektrum wesentlich besser hervor. Gleiches gilt auch für die FFT, jedoch wird ohne Zeropadding (blaue Kurve) hier die Frequenzauflösung unschärfer. Mit Zeropadding (rote Kurve) wird die Frequenzauflösung der Darstellung zwar verbessert, jedoch geht hier die Dickenfrequenz nicht eindeutig hervor, da sich eine zusätzliche Spitze bei etwa 3 kHz zeigt. Das Wavelet-Marginalspektrum liefert eine relativ breite Anzeige bei 3 kHz.

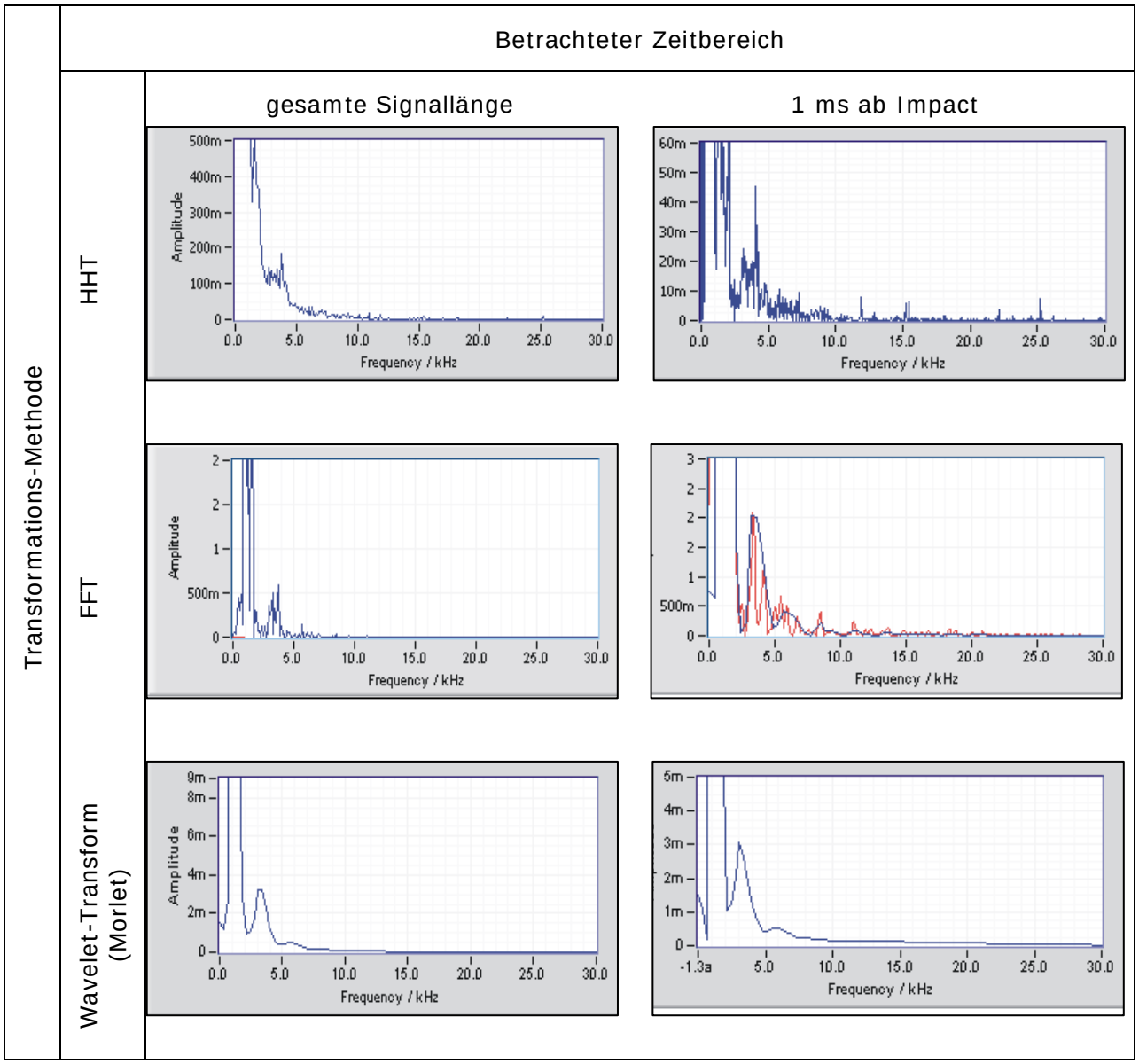


Abb. 16: Amplituden-Frequenz-Darstellungen von HHT (Marginalspektrum), FFT mit (rote Kurve) und ohne (blaue Kurve) Zeropadding und Wavelet-Transformation (Marginalspektrum) für unterschiedliche ausgewählte Zeitbereiche.

3.3 Signalfilterung durch selektive Kombination von IMFs

Nun soll an diesem Datensatz die Möglichkeit des Einsatzes der EMD zur Signalfilterung genutzt werden. Das gelingt durch selektive Kombination der für das Impact-Echo-Signal wesentlichen IMFs und gezieltes Ausklammern von IMFs, die offensichtlich einen hohen Anteil der Störeinwirkungen beinhalten. Abbildung 17 zeigt das derart gefilterte und rekonstruierte Signal. Im HHT-Marginalspektrum (Abbildung 18, rechts) hierfür erhält man daraus auch bei einer einfließenden Signallänge von 3 ms ab Impact-Anregung noch eine eindeutige und scharfe Anzeige der Dickenfrequenz. Jedoch auch ohne anschließende Anwendung der Hilbert-Transformation auf die ausgewählten IMFs kann sich diese Art der Filterung sinnvoll sein. So zeigt auch die FFT (Abbildung 18, links) für die

gefilterten Daten eine eindeutige Anzeige der mit der Probekörperdicke korrespondierenden Frequenz, insbesondere bei der Nutzung von Zeropadding.

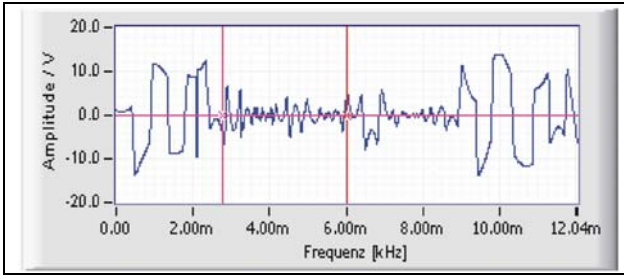


Abb. 17: Durch selektive Rekombination der IMFs gefiltertesZeitsignal (EMD-Filter).

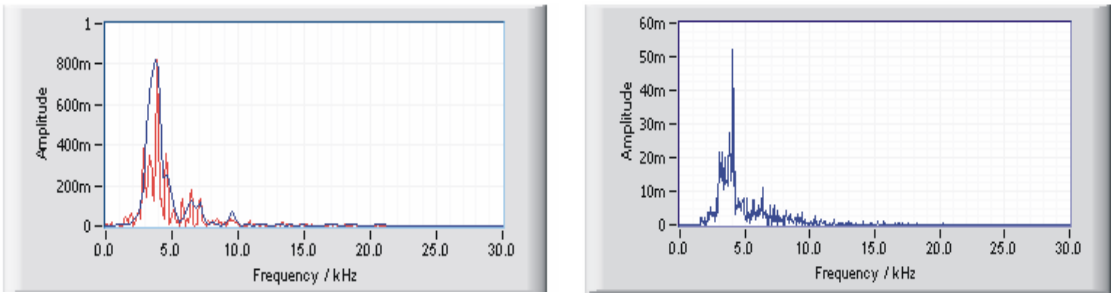


Abb. 18: HHT-Marginalspektrum und FFT (blaue Linie: ohne Zeropadding, rote Linie: mit Zeropadding) nach der Filterung durch selektive Rekombination der IMFs (EMD-Filter)

4 Kurzzusammenfassung

Durch die Anwendung der HHT auf reale IE-Messdaten ist es in den gezeigten Fallbeispielen möglich, kurzzeitige transiente Signale zu identifizieren, die aus der herkömmlichen Auswertung durch FFT und STFT weit weniger deutlich hervorgingen bzw. verborgen blieben. Des Weiteren kann die mit der Empirical Mode Decomposition (EMD) als Bestandteil der HHT verbundene Zerlegung der Daten zur sinnvollen Filterung verwendet werden.

5 Literatur

1 Wiggenhauser, H.: Impact-Echo. in: Bauphysikkalender, Ernst & Sohn, Berlin, S. 358-365. (2004).

2 Schickert, G. & Henschen, J. & Krause, M. & Maierhofer, C. & Weise, F. & Wiggenhauser, H. & Borchardt, K.: ZfPBau-Kompendium. Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung BAM, Berlin, (1999) www.bam.de/service/publikationen/zfp_kompendium/welcome.htm

3 Sansalone, M. & B. Streett: Impact-Echo. Jersey Shore, PA.: Bullbrier Press, (1997).

4 Huang, N. E.:The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis. Procedures of the Royal Society of London, A454, S. 903-995, (1998).

5 Huang, N. E. & Wu, M. L. & Long, S. R. & Shen, S. S. P. & Qu, W. D. & Gloersen, P. & Fan, K. L.: A confidence limit for the empirical mode decomposition and the Hilbert spectral analysis. Procedures of the Royal Society of London, A459, S. 2317-2345, (2003).

6 Huang, N. E. & Wu, M. L. & Ou, W. & Long, S. R. & Shen, S. S. P: Applications of Hilbert-Huang transform to non-stationary financial time series analysis. Applied Stochastic Models in Business and Industry, Vol. 19, S. 245-268, (2003).

7 Long, David G.: Comments on Hilbert Transform Based Signal Analysis. MERS Technical Report #MERS 95-005, (1998).

8 Rilling, G. & Flandrin, P. & Goncalves, P.: On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms. Proc. IEEE – EURASIP, Proceedings from the Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Grado, Italien, 8-11 Juni 2003.

9 Flandrin, P.,& Rilling, G. & Goncalves, R.: Empirical Mode Decomposition as a Filter Bank. Signal Processing Letters, IEEE, Vol. 11, 2, S. 112-114, (2004).

10 Kizhner, S. & Flatley, T. P., Huang, N. E. & Blank, K. & Smith, D.: Hilbert-Huang Transform Data Processing System (HHT-DPS).Hilbert-Huang Transform Advanced Technology Briefing , NASA Goddard Space Flight Center, March 24, (2003).

11 Peng, H.M.; Chang, P.C.; Chang, F.R.: Hilbert Spectrum for Time-Domain Measurement Data and its Application. 34th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, (2003).

12 Zhihua Yang, Dongxu Qi and Lihua Yang : Signal Period Analysis Based on Hilbert-Huang Transform and its Application to Texture Analysis. Proceedings of the Third International Conference on Image and Graphics, 18-20 December, Hong Kong, China, S. 430—433, (2004).